

Unidad V: Integración

5.1 Introducción

La integración es un concepto fundamental de las matemáticas avanzadas, especialmente en los campos del cálculo y del análisis matemático. Básicamente, una integral es una suma de infinitos sumandos, infinitamente pequeños. El cálculo integral, en cuadrado en el cálculo infinitesimal, es una rama de las matemáticas en el proceso de integración o anti-derivación, es muy común en la ingeniería y en la matemática en general y se utiliza principalmente para el cálculo de áreas y volúmenes de regiones y sólidos de revolución. Fue usado por primera vez por científicos como Arquímedes, René Descartes, Isaac Newton, Gottfried Leibniz e Isaac Barrow. Los trabajos de este último y los aportes de Newton generaron el teorema fundamental del cálculo integral, que propone que la derivación y la integración son procesos inversos. Dada una función $f(x)$ de una variable real x y un intervalo $[a,b]$ de la recta real, la integral.

5.2 Integral de línea

Una integral de línea acumula elementos a lo largo de una curva.

El concepto de integral se puede extender a dominios de integración más generales, tales como las líneas curvas y las superficies. Estas integrales se conocen como integrales de línea e integrales de superficie respectivamente. Tienen importantes aplicaciones en la física cuando se trata con campos vectoriales.

Una integral de línea es una integral donde la función a integrar es evaluada a lo largo de una curva. Se utilizan varias integrales curvilíneas diferentes. En el caso de una curva cerrada también se la denomina integral de contorno.

La función a integrar puede ser un campo escalar o un campo vectorial. El valor de la integral curvilínea es la suma de los valores del campo en los puntos de la línea, ponderados por alguna función escalar de la curva (habitualmente la longitud del arco o, en el caso de un campo vectorial, el producto escalar del campo vectorial

por un vector diferencial de la curva). Esta ponderación distingue las integrales curvilíneas de las integrales más sencillas definidas sobre intervalos.

Muchas fórmulas sencillas de la física tienen de forma natural análogas continuas en términos de integrales de línea; por ejemplo, el hecho de que el trabajo sea igual a la fuerza multiplicada por la distancia se puede expresar (en términos de cantidades vectoriales) como:

$$W = \vec{F} \cdot \vec{d}$$

que tiene su paralelismo en la integral de línea

$$W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

5.3 Integrales iteradas dobles y triples

Integrales iteradas triples.

Se llama prisma rectangular o intervalo tridimensional al siguiente subconjunto de $\mathbb{R}^3$:

$$R = [a, b] \times [c, d] \times [e, h] = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, e \leq z \leq h\}$$

Donde $a < b$, $c < d$, $e < h$ son números reales fijos.

Sean: $D_1 \subseteq [a, b] \times [c, d] \cap [e, h]$ dos funciones continuas tales que $\phi(x, y) \leq \psi(x, y)$ para todo $(x, y) \in D_1$, donde D_1 es un dominio simple (respecto de x o respecto de y) en el rectángulo

$[a, b] \times [c, d]$ del plano x, y .

Hágase un dibujo en el espacio, con tres ejes coordenadas x, y, z : el dominio D_1 está en el plano “horizontal” $z = 0$ y proyectándose sobre él, en el espacio, están las gráficas de las funciones

$\phi(x, y)$ y $\psi(x, y)$.

Consideremos el dominio D (tridimensional) contenido en el prisma rectangular $R = [a, b] \times [c, d] \times [e, h]$ definido como:

$$D = \{(x, y) \in D_1, \phi(x, y) \leq z \leq \psi(x, y)\} \quad (1)$$

En el dibujo realizado antes D es el sólido comprendido entre las gráficas de las funciones ϕ y ψ , que se proyecta verticalmente sobre el dominio plano D_1 del plano x, y .

Para cada (x, y) fijos en el dominio plano D_1 , el segmento (bastón) vertical $_{(x, y)} \phi(x, y) \leq z \leq \psi(x, y)$ está contenido en el sólido D . Al mover el punto $(x, y) \in D_1$, este bastón vertical “barre” el sólido D .

Definición

El dominio D que cumple (1) se llama dominio (tridimensional) simple

Respecto de x, y , si su proyección D_1 sobre el plano $z = 0$ es simple respecto de x ; y se llama

Dominio (tridimensional) simple respecto de y, x si su proyección D_1 sobre el plano $z = 0$ es

Simple respecto de y .

El análisis del sólido D a continuación debe seguirse con figuras tridimensionales, como la

Explicada antes de la definición 3.1.1:

Consideremos primero el dominio (bidimensional) simple D_1 , simple respecto de x . Entonces,

Por la definición 3.1.1, el dominio D (tridimensional) definido en (1) es simple respecto a x, y

Adquiere la forma siguiente:

$$D = \{a \leq x \leq b, \mu(x) \leq y \leq \mu(x), \nu(x, y) \leq z \leq \nu(x, y)\} \quad (1b)$$

Se puede mirar a D de la forma que describimos más abajo, en vez de verlo como generado por

Bastones verticales para cada (x, y) fijo en D_1 , que recorren D cuando (x, y) se mueve en D_1 . Para

Cada $x = x_0 \in [a, b]$ fijo, la intersección del sólido D con el plano vertical $x = x_0$ (este plano es

Perpendicular al eje de las x) es un dominio plano, “tajada o feta” del sólido D al cortarlo con un

Plano vertical, que tiene por ecuación:

$$D \cap \{x = x_0\} = \{(y, z) : \mu(x_0) \leq y \leq \mu(x_0), \nu(x_0, y) \leq z \leq \nu(x_0, y)\} \quad (1c).$$

5.4 Aplicaciones a áreas y solución de problema.

Aplicaciones a áreas y solución de problema

Suma y resta de vectores: método gráfico y analítico.

Cuando necesitamos sumar 2 o más magnitudes escalares de la misma especie lo hacemos aritméticamente. Por ejemplo, $2\text{kg} + 5\text{kg} = 7\text{kg}$; $20\text{m}^2 + 10\text{m}^2 = 30\text{m}^2$; $3\text{h} + 4\text{h} = 7\text{h}$; $200\text{K} + 100\text{K} = 300\text{K}$. Sin embargo, para sumar magnitudes vectoriales, que como ya mencionamos aparte de magnitudes tienen dirección y sentido, debemos utilizar métodos diferentes a una simple suma aritmética. Estos métodos pueden ser gráficos o analíticos, pero ambos casos se consideran además de la magnitud del vector, su dirección y su sentido.

Resolución de problemas de suma de vectores

Un jinete y su caballo cabalgan 3km al norte y después 4km al oeste.

Calcular:

¿Cuál es la diferencia total que recorren?

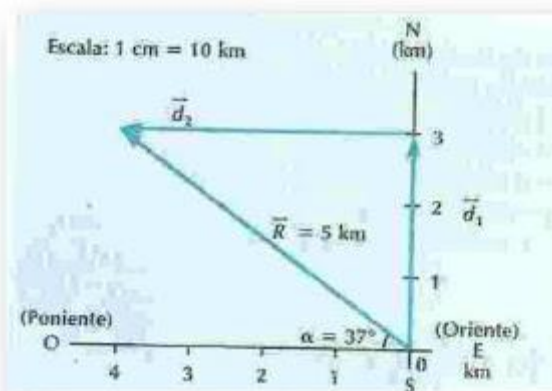
¿Cuál es su desplazamiento?

Solución:

Como la distancia es una magnitud escalar, encontramos la distancia total recorrida al sumar aritméticamente las dos distancias:

$$D_t = d_1 + d_2 = 3\text{km} + 4\text{km} = 7\text{km}$$

para encontrar su desplazamiento, que es una magnitud vectorial toda vez que corresponde a una distancia medida en una dirección particular entre dos puntos (el de partida y el de llegada), debemos hacer un diagrama vectorial. Para ello, dibujamos a escala el primer desplazamiento de 3 km realizado al norte, representado por $\vec{d}_1$, después el segundo desplazamiento de 4 km al oeste representado por $\vec{d}_2$. Posteriormente, unimos el origen del vector $\vec{d}_1$ con el extremo del vector $\vec{d}_2$, al fin de encontrar el vector $\vec{r}$ equivalente a la suma vectorial de los dos desplazamientos. El origen del vector resultante $\vec{R}$ es el mismo que tiene el origen del vector $\vec{d}_1$ y su extremo coincide con el vector $\vec{d}_2$. Para calcular la magnitud de $\vec{R}$ medimos su longitud de acuerdo con la escala utilizada y su dirección se determina por el ángulo α que forma. Así, encontramos que $R = 5$ km. con un ángulo α de 37° en dirección noroeste.



5.5 Integral doble en coordenadas polares

De la misma manera en que la integral de una función positiva $f(x)$ de una variable definida en un intervalo puede interpretarse como el área entre la gráfica de la

función y el eje x en ese intervalo, la doble integral de una función positiva $f(x, y)$ de dos variables, definida en una región del plano xy , se puede interpretar como el volumen entre la superficie definida por la función y el plano xy en ese intervalo. Al realizar una “integral triple” de una función $f(x, y, z)$ definida en una región del espacio xyz , el resultado es un hipervolumen, sin embargo es bueno notar que si $f(x, y, z) = 1$ el resultado se puede interpretar como el volumen de la región de integración. Para integrales de órdenes superiores, el resultado geométrico corresponde a hipervolumenes de dimensiones cada vez superiores. La manera más usual de representar una integral múltiple es anidando signos de integración en el orden inverso al orden de ejecución (el de más a la izquierda es el último en ser calculado), seguido de la función y los diferenciales en orden de ejecución. El Dominio de Integración se representa simbólicamente para cada diferencial sobre cada signo de integral, o a menudo es abreviado por una letra en el signo de integral de más a la derecha:

Es importante destacar que es imposible calcular la antiderivada de una función de más de una variable por lo que las integrales múltiples indefinidas no existen.

Definición

Una forma relativamente sencilla de definir las integrales múltiples es mediante su representación geométrica como la magnitud del espacio entre el objeto definido por la ecuación $x_{n+1} = f(x_1, \dots, x_n)$ y una región T en el espacio definido por los ejes de las variables independientes de la función f (si T es una región cerrada y acotada y f está definida en la región T). Por ejemplo, si $n = 2$, el volumen situado entre la superficie definida por $x_3 = f(x_1, x_2)$ y una región T en el plano $x_1 \times x_2$ es igual a alguna integral doble, si es que la función f está definida en región T .

Se puede dividir la región T en una partición interior Δ formada por m subregiones rectangulares sin solapamiento que estén completamente contenidas en T . La norma $||\Delta||$ de esta partición está dada por la diagonal más larga en las m subregiones.

Si se toma un punto $(x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{ni})$ que esté contenido dentro de la subregión con dimensiones $\Delta x_{1i} \Delta x_{2i} \dots \Delta x_{ni}$ para cada una de las m subregiones de la partición, se puede construir un espacio con una magnitud aproximada a la del espacio entre el objeto definido por $x_{n+1} = f(x_1, \dots, x_n)$ y la subregión i . Este espacio tendrá una magnitud de:

Entonces se puede aproximar la magnitud del espacio entero situado entre el objeto definido por la ecuación $x_{n+1} = f(x_1, \dots, x_n)$ y la región T mediante la suma de Riemann de las magnitudes de los m espacios correspondientes a cada una de las subregiones:

Esta aproximación mejora a medida que el número m de subregiones se hace mayor. Esto sugiere que se podría obtener la magnitud exacta tomando el límite. Al aumentar el número de subregiones disminuirá la norma de la partición:

El significado riguroso de éste último límite es que el límite es igual L si y sólo si para todo existe un $\delta > 0$ tal que para toda partición Δ de la región T (que satisfaga $||\Delta|| < \delta$), y para todas las elecciones posibles de $(x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{ni})$ en la i -ésima subregión. Esto conduce a la definición formal de una integral múltiple:

Si f está definida en una región cerrada y acotada T del definido por los ejes de las variables independientes de f , la integral de f sobre T está dada por:

siempre que el límite exista. Si el límite existe se dice que f es integrable con respecto a T .

5.6 Coordenadas cilíndricas y esféricas

Coordenadas cilíndricas:

$$\int_Q \int \int f(r, \theta, z) dV = \int_a^b \int_{\alpha_1(\theta)}^{\alpha_2(\theta)} \int_{\beta_1(r, \theta)}^{\beta_2(r, \theta)} f(r, \theta, z) r \, dz \, dr \, d\theta$$

Un sólido tiene forma de la región Q, que se encuentra dentro del cilindro $r=a$ y de la esfera $r^2+z^2=4a^2$ y por arriba del plano xy . La densidad en el punto $p(r, \theta, z)$ está dada por $\rho(r, \theta, z)$ (masa del sólido).

Coordenadas Esféricas:

$$\int_Q \int \int f(\rho, \varphi, \theta) dV = \int_a^b \int_c^d \int_e^f f(\rho, \varphi, \theta) \rho^2 \sin \varphi \, d\rho \, d\varphi \, d\theta$$

En el sistemas de coordenadas cilíndricas un punto P del espacio tridimensional está representado por la terna ordenada (r, θ, z) , donde r y el θ son las coordenadas polares de la proyección de P en el plano xy y z es la distancia dirigida del plano xy a P.

Ecuaciones para transformar de Cilíndricas a Rectangulares

Las coordenadas cilíndricas son útiles en problemas que tienen simetría alrededor de un eje, en ese caso se selecciona el eje z de manera que coincida con el eje de simetría

Ecuaciones para transformar de Rectangulares a Cilíndricas

Ecuaciones para transformar de Cilíndricas a Esféricas

El sistema de coordenadas esféricas es especialmente útil en problemas donde hay simetría alrededor de un punto, y el origen se pone en ese punto.

Las coordenadas esféricas (ρ, θ, φ) de un punto P en el espacio, donde $\rho = |OP|$ es la distancia del origen a P, θ es el mismo ángulo que en las coordenadas cilíndricas, y φ es el ángulo entre el semieje positivo z y el segmento de recta OP. Note que

$$\rho \geq 0 \quad 0 \leq \varphi \leq \pi$$

El sistema de coordenadas esféricas es especialmente útil en problemas donde hay simetría alrededor de un punto, y el origen se pone en ese punto.

Dado un vector del espacio tridimensional y tres planos que se cortan en el punto origen de , se definen las coordenadas esféricas como los tres números que se obtienen desde las proyecciones ortogonales del vector sobre las tres aristas de intersección de los planos perpendiculares, por las relaciones siguientes:

Sistema de Coordenadas Esféricas

Es el sistema de coordenadas esféricas un punto p del espacio que viene representado por un trío ordenado , donde:

- 1.- es la distancia de P al origen, .
- 2.- es el mismo Angulo utilizado en coordenadas cilíndricas para .
- 3.- es el Angulo entre el semieje positivo y el segmento recto .

5.7 Aplicación de la integral triple en coordenadas cartesianas, cilíndricas y esféricas

En geometría plana, el sistema de coordenadas polares se usa para dar una descripción cómoda de ciertas curvas y regiones. La figura siguiente hace posible que recordemos la conexión entre coordenadas polares y cartesianas. Si el punto P tiene coordenadas cartesianas (x, y) y coordenadas polares (r, θ) , entonces , de la figura,

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

$$r^2 = x^2 + y^2, \quad \tan \theta = \frac{y}{x}$$